b) Montrer que f(K)=C.

3) On pose g=f ∘ s.

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport .

b) On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre .
Montrer que g∘g est l'homothétie de centre Ω et et de rapport 4.
Vérifier que g ∘ g(D)=B.

c) Donner une construction de l'axe Δ de g.

PROBLEME (10 points)

I-1/ Etudier les variations de la fonction g : IR → IR; x ↦ $(1-x)e^{-x}+1$ et déduire que pour tout réel x on a: g(x) > 0.

2/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = xe^{-x} + x$. On désigne par C_f la courbe de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

a- Etudier les variations de f .

b- Montrer que la droite Δ d'équation y=x est une asymptote à C_f au voisinage de +∞. Etudier la position relative de C_f par rapport à Δ.

c- Tracer la courbe C_f.

3/ Soit α un réel strictement positif. On désigne par A(α) l'aire de la partie du plan limitée par C_f; Δ et les droites d'équations respectives x=0 et x=α.

a- Calculer A(α).

b- Déterminer A(1) et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

II- Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction

$F_n : [0;+\infty[\to IR; x \mapsto \int_0^x t^n e^{-t}dt$.

1) Montrer que $F_1(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}$.

2)a- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 2$; on a:

$$F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$$

b- Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$;

$F_n(x)=n!\left[1-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right]$ où x est un réel strictement positif.

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

3) Montrer que $\forall n \in IN^*; \forall x > 0$ on a : $\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x} \leq F_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

4) Soit x un réel strictement positif.

a- Montrer que pour $\forall n \in IN$ tel que $n \geq 2x$, on a : $\frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$